الحل المفصّل للموضوع الأوّل:

التمرين الأوّل:

نعتبر النقط $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$.

1) **التحقق أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ و $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{2}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A، B و C تعيّن مستويا وبما أنّ $x_A - y_A + z_A - 1 = 2-1-1=0$ ، $x_B - y_B + z_B - 1 = 1-2+2-1=0$ و $x_C - y_C + z_C - 1 = 3-3+1-1=0$ فإن $x-y+z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) **تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ ومنه $AB=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

و $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ ومنه $AC=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

و $\overrightarrow{BC}(2;1;-1)$ ومنه $BC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ـ التحقق أن مساحته $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة.

لتكن H منتصف $[AB]$ إذن $H\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};1\right)$ ومنه $CH=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

وعليه $S(ABC)=\frac{AB\times CH}{2}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}ua$.

طريقة ثانية:

$$S(ABC)=\frac{1}{2}AB\times AC\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}ua$$

3) **تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يعامد المستوي (ABC) ويشمل النقطة D.**

لدينا $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وهو شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (Δ) لدينا $\overrightarrow{DM}=t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \;;(t\in\mathbb{R}) \\ z=4+t \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

4) أ) **تعيين إحداثيات النقطة E.**

E هي نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (ABC).

نحل الجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=4+t \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ وعليه $1+t-(1-t)+4+t-1=0$ ومنه $3t+3=0$ أي $t=-1$.

إذن $E(0;2;3)$.

حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

$d(D;(ABC))=DE=\sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{3}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ب) تعيين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$.

$d\left(D;(ABC)\right)=\sqrt{3}$ فإن إحدى الكرتين مركزها D فيكون مركز الكرة الثانية D' نظيرة D بالنسبة إلى E.

أي E منتصف $[DD']$.

لدينا إذن $\overrightarrow{ED'}=-\overrightarrow{ED}$ معناه $\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OD'}=-\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{OD}$ ومنه $\overrightarrow{OD'}=-2\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{OD}$ أي $\overrightarrow{OD'}=2\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}$

وعليه $x_{D'}=2x_E-x_D=-1$ و $y_{D'}=2y_E-y_D=3$ و $z_{D'}=2z_E-z_D=2$ إذن $D'(-1;3;2)$.

التمرين الثاني:

I) $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3............(1)\\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}....(2)\end{cases}$ من (1) نجد $\beta=2\alpha+3$ بالتعويض في (2) نجد $2\overline{\alpha}+\overline{2\alpha+3}=-3-2i\sqrt{3}$

$4\overline{\alpha}+3=-3-2i\sqrt{3}$ وعليه $\overline{\alpha}=\dfrac{-3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أي $\alpha=\dfrac{-3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

وعليه $\beta=2\left(\dfrac{-3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+3$ أي $\beta=i\sqrt{3}$.

II) 1) أ) كتابة z_A و z_C على الشكل الأسي.

$$z_A=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$z_B=\overline{z_A}=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{-5\pi}{6}\right)}$$

$z_A=z_Ce^{i\frac{\pi}{3}}$ معناه $z_C=z_Ae^{-i\frac{\pi}{3}}$ وعليه $z_C=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}\right)=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

*** تعيين قيم العدد الطبيعي n، حتى يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.**

$\dfrac{z_A}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{3}}$.

$\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا معناه $\arg\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n=\pi+2k\pi$ ومنه $\dfrac{n\pi}{3}=\pi+2k\pi$ أي $n=3+6k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

ب) التحقق أن العدد المركب $2\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\dfrac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\dfrac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}=2e^{i\left(\frac{2015\times5\pi}{6}\right)}=2e^{i\left(1679\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{3}-i$$

$$\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}=e^{i\left(\frac{1962\times(-5\pi)}{6}\right)}=e^{-i(1635\pi)}=-1$$

$$\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}=e^{i\left(\frac{1435\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=-i$$

وعليه $2\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\dfrac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\dfrac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}=-\sqrt{3}-i-1+i=-\sqrt{3}-1\in\mathbb{R}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2) أ) تحديد النسبة والزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A.

$$\frac{z_A}{z_D}=\frac{\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

ومنه نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{6}}{2}$ و زاويته $\frac{7\pi}{6}$.

ب) كتابة $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_A}{z_D}=\frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2+2i}=\frac{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(2-2i\right)}{\left(2+2i\right)\left(2-2i\right)}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{8}+i\frac{6+2\sqrt{3}}{8}$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

لدينا $\frac{z_A}{z_D}=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$ ومن جهة أخرى $\frac{z_A}{z_D}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{8}+i\frac{6+2\sqrt{3}}{8}$

إذن $\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{8}+i\frac{6+2\sqrt{3}}{8}$ ومنه $e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}+i\frac{6+2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}$

أي $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$ وعليه $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$.

3) **تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $z=k\left(1+i\right)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث $k\in\mathbb{R}^+$.**

$z=k\left(1+i\right)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ معناه $z=kz_De^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ يكافئ $z=kz_A$ ويكافئ $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}$ و $k\in\mathbb{R}^+$

وبالتالي مجموعة النقط M هي نصف المستقيم $[OA)$.

التمرين الثالث:

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=e^2-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\left(1+u_n\right)e^{-2}-1$.

1) **حساب** u_1، u_2 و u_3.

$u_1=\left(1+u_0\right)e^{-2}-1=e^2\times e^{-2}-1=0$، $u_2=\left(1+u_1\right)e^{-2}-1=e^{-2}-1$،

$u_3=\left(1+u_2\right)e^{-2}-1=\left(e^{-2}\right)e^{-2}-1=e^{-4}-1$.

2) **إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1+u_n>0$.**

لدينا $1+u_0=e^2$ ومنه $1+u_0>0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $1+u_n>0$ ونبرهن أنّ $1+u_{n+1}>0$.

لدينا $1+u_{n+1}=\left(1+u_n\right)e^{-2}$ ولدينا حسب الفرضية $1+u_n>0$ ومنه $1+u_{n+1}>0$.

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $1+u_n>0$.

3) **تبيين أن المتتالية (u_n) متناقصة.**

لدينا $u_{n+1}-u_n=\left(1+u_n\right)e^{-2}-1-u_n=\left(1+u_n\right)e^{-2}-\left(1+u_n\right)=\left(1+u_n\right)\left(e^{-2}-1\right)$

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1+u_n>0$ و $e^{-2}-1<0$ فإن $\left(1+u_n\right)\left(e^{-2}-1\right)<0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$

aziz_mus1@hotmail.fr

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

يمكن استعمال البرهان بالتراجع.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}<u_n$.

لدينا $u_0=e^2-1$ و $u_1=0$ ومنه $u_1<u_0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $u_{k+1}<u_k$ ونبرهن أن $u_{k+2}<u_{k+1}$.

لدينا $u_{k+1}<u_k$ معناه $1+u_{k+1}<1+u_k$ يكافئ $(1+u_{k+1})e^{-2}<(1+u_k)e^{-2}$ يكافئ $(1+u_{k+1})e^{-2}-1<(1+u_k)e^{-2}-1$ أي $u_{k+2}<u_{k+1}$ وعليه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}<u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $1+u_n>0$ أي $u_n>-1$ ومنه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -1 وبما أنها متناقصة فهي متقاربة.

4) **أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.**

$v_{n+1}=3(1+u_{n+1})=3\left((1+u_n)e^{-2}\right)=e^{-2}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها e^{-2} وحدها الأوّل $v_0=3(1+u_0)=3e^2$.

ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n.

$$v_n=3e^2\left(e^{-2}\right)^n=3e^{-2n+2}$$

لدينا $v_n=3(1+u_n)$ ومنه $u_n=\frac{1}{3}v_n-1$ أي $u_n=e^{-2n+2}-1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-2n+2}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-2n+2}-1=-1$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=3e^2\left(e^{-2}\right)^n$.

إذن $v_0\times v_1\times\ldots\times v_n=3e^2\left(e^{-2}\right)^0\times3e^2\left(e^{-2}\right)^1\times\ldots\times3e^2\left(e^{-2}\right)^n$

$$v_0\times v_1\times\ldots\times v_n=\left(3e^2\right)^{n+1}\left(e^{-2}\right)^{0+1+\ldots+n}=\left(3e^2\right)^{n+1}\left(e^{-2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$v_0\times v_1\times\ldots\times v_n=\left(3e^2\right)^{n+1}\times e^{-n(n+1)}=\left(3e^2\times e^{-n}\right)^{n+1}=\left(3e^{2-n}\right)^{n+1}$$

ومنه $\ln\left(v_0\times v_1\times\ldots\times v_n\right)=\ln\left(3e^{2-n}\right)^{n+1}=(n+1)\ln\left(3e^{2-n}\right)$

أي $\ln v_0+\ln v_n+\ldots+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln3)$

طريقة ثانية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=3e^{-2n+2}$ معناه $\ln v_n=\ln\left(3e^{-2n+2}\right)=\ln3+\ln e^{-2n+2}$

أي $\ln v_n=\ln3+2-2n$.

$$\ln v_0+\ln v_1+\ldots+\ln v_n=(\ln3+2-2\times0)+(\ln3+2-2\times1)+\ldots+(\ln3+2-2n)$$

$$\ln v_0+\ln v_1+\ldots+\ln v_n=(n+1)(\ln3+2)-2(0+1+\ldots+n)$$

$$\ln v_0+\ln v_1+\ldots+\ln v_n=(n+1)(\ln3+2)-2\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\ln v_0+\ln v_1+\ldots+\ln v_n=(n+1)(\ln3+2)-n(n+1)$$

$$\ln v_0+\ln v_1+\ldots+\ln v_n=(n+1)(\ln3+2-n).$$

كما أنه يمكن الإستدلال على الخاصية بالتراجع.

aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الرابع:

1) **بقراءة بيانية تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ).**

في المجال $]0;\alpha[$ ، (γ) يقع أسفل (Δ).

وفي المجال $]\alpha;+\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ).

(γ) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha;\ln\alpha)$.

2) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

لدينا حسب السؤال السابق من أجل كل $x\in]0;\alpha[$: $\ln x-(-x+3)<0$ أي $g(x)<0$.

ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$: $\ln x-(-x+3)>0$ أي $g(x)>0$.

ومن أجل $x=\alpha$: $\ln\alpha-(-\alpha+3)=0$ أي $g(\alpha)=0$.

3) **التحقق أنّ** $2,2<\alpha<2,3$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[2,2;2,3]$ ولدينا $g(2,2)\approx-0,01$ و $g(2,3)\approx 0,13$ أي $g(2,3)\times g(2,3)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(\alpha)=0$ حيث $2,2<\alpha<2,3$

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)$.

1) **حساب** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln(x)-2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$.

2) **إثبات أنه من أجل كل** x **من** $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\ln x-2}{x^2}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا $\ln\alpha=-\alpha+3$

ومنه $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(-\alpha+3-2)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ $1,2<\alpha-1<1,3$ يكافئ $1,44<(\alpha-1)^2<1,69$ إذن $\frac{1,44}{2,3}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{1,69}{2,2}$

أي $0,62 < \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < 0,77$ وعليه $-0,77 < f(\alpha) < -0,62$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

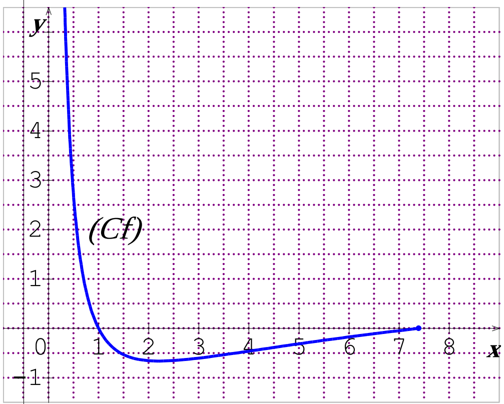
من أجل ذلك ندرس إشارة $f(x)$.

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=\frac{1}{x}(x-1)(\ln x-2)$$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(C_f) فوق محور الفواصل في المجالين $]0;1[$ و $]e^2;+\infty[$ و (C_f) تحت محور الفواصل في المجال $]1;e^2[$.

و (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2.



الرسم

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق: $F(1)=-3$

1) تبيين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تعني $f(x)=0$ ومنه $x=1$ أو $x=e^2$.

وبالتالي منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2.

2) تبيين أنّ $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدّالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

نضع $h(x)=x\ln x-x$ ومنه $h'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}\times x-1=\ln x+1-1=\ln x$

وعليه الدالة h هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

استنتاج عبارة F.

لدينا $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)=\ln x-2-\dfrac{1}{x}\ln x+2\dfrac{1}{x}$

ومنه $F(x)=x\ln x-x-2x-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x+\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

أي $F(x)=x\ln x-3x-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x+\lambda$

بما أنّ $F(1)=-3$ فإن $-3+\lambda=-3$ أي $\lambda=0$ إذن $F(x)=x\ln x-3x-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x$.

الحل المفصّل للموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

لدينا $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ و $D(1;0;-2)$.

الإجابة بصحيح أو خطأ.

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-3;-4)$ و $\dfrac{0}{-3}\neq\dfrac{-2}{1}$ إذن الشعاعان غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A،

تعيّن مستويا وعليه العبارة 1) صحيحة.

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

لدينا $2x_A+2y_A-z_A-11=4+8-1-11=0$ ، $2x_B+2y_B-z_B-11=0+8+3-11=0$ و $2x_C+2y_C-z_C-11=6+2+3-11=0$ ومنه إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة المعطاة وعليه العبارة صحيحة.

3) النقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

لدينا $\overrightarrow{DE}(2;2;1)$ و $\vec{n}(2;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\frac{1}{-1}\neq\frac{2}{2}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{DE}$ و $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا وعليه العبارة المعطاة خاطئة.

4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي.

بما أنه يوجد مستو وحيد يشمل النقط A، B و C والنقطة D خارجة عن هذا المستوي فإن المستقيمان (AB) و (CD) ليسا من نفس المستوي وعليه العبارة المعطاة خاطئة.

5) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-t-1 \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (CD).

لدينا $\overrightarrow{DC}(2;1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (CD).

$M(x;y;z)\in(CD)$ معناه يوجد عدد حقيقي λ بحيث $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DC}$

ومنه $\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=\lambda \quad ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=-\lambda-2 \end{cases}$ وبأخذ $\lambda=t-1$ نجد $\begin{cases} x=2(t-1)+1 \\ y=t-1 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-(t-1)-2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-t-2 \end{cases}$

وعليه العبارة صحيحة.

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

لدينا $\overrightarrow{IA}\left(\frac{7}{5};0;\frac{14}{5}\right)$ و $\overrightarrow{IB}\left(\frac{-3}{5};0;-\frac{6}{5}\right)$ إذن $\overrightarrow{IA}=-\frac{7}{3}\overrightarrow{IB}$ وعليه $3\overrightarrow{IA}=-7\overrightarrow{IB}$ أي $3\overrightarrow{IA}+7\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

إذن $(\alpha;\beta)=(3;7)$ وعليه العبارة صحيحة.

التمرين الثاني:

$z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ و $z_C=-(z_A+z_B)$.

1) **أ) كتابة z_B و z_C على الشكل الأسي.**

$$z_B=-\overline{z_A}=-2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\pi}\times e^{-i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_C=-\left(z_A-\overline{z_A}\right)=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ب) استنتاج أن النقط A، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ معناه $OA=OB=OC=2$ إذن النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها 2.

ج) إنشاء الدائرة (γ) والنقط A، B و C.

aziz_mus1@hotmail.fr

2) **أ) التحقق أن** $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3}+i+2i}{-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب) استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

لدينا $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ معناه $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3}$

وهذا يعني أنّ $BC = BA$ و $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{3}$ وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع فيكون مركز الدائرة المحيطة به هي مركز ثقله أي O هي مركز ثقله.

جـ) تعيين وإنشاء (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة حيث $|z| = \left|z - \sqrt{3} - i\right|$.

$|z| = \left|z - \sqrt{3} - i\right|$ تعني $|z| = \left|z - \left(\sqrt{3}+i\right)\right|$ أي $OM = AM$ وبالتالي (E) هي محور القطعة $[OA]$.

3) **أ - تعيين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A.**

$\frac{z_A}{z_C} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ إذن زاويه الدوران r هي $\frac{2\pi}{3}$.

طريقة مختلفة

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OC};\vec{u}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) - \left(\vec{u};\overrightarrow{OC}\right) = \arg(z_A) - \arg(z_C) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

ولدينا $OA = OC$ ومنه زاوية الدوران r هي $\frac{2\pi}{3}$.

ب) تبيان أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

لدينا ABC مضلع منتظم مركزه O إذن $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{3}$ وهذا يعني أن B هي صورة النقطة A

لتكن M نقطة من (E)؛ M' صورتها بالدوران.

لدينا $r(A) = B$ و $r(M) = M'$ إذن حسب الخاصية المميزة للدوران فإن $OM = OM'$ و $AM = BM'$

ولدينا $OM = AM$ ومنه $OM' = BM'$ وهذا يعني أن M' تنتمي لمحور القطعة $[OB]$.

وعليه صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين الثالث:

1) **تعيين إتجاه تغيّر الدالة f.**

الدالة f تقبل الإشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{4(x+1) - 4x - 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

2) **دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).**

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0;+\infty[$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$f(x)-x=\frac{4x+1}{x+1}-x=\frac{4x+1-x^2-x}{x+1}=\frac{-x^2+3x+1}{(x+1)^2}=\frac{\left(-x+\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$، $\frac{\left(x+\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1}>0$ ومنه إشارة $f(x)-x$ مثل إشارة $\left(-x+\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

x	0 $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ $+\infty$
$f(x)-x$	$+$ 0 $-$
الوضعية	(C_f) فوق (D) ؛ (C_f) و (D) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ ؛ (C_f) تحت (D)

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$.

1) أ) إنشاء على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3، v_0، v_1، v_2 و v_3.

ب) تخمين اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ويتقاربان نحو العدد $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\le u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n\le 5$.

لدينا $2\le u_0<\alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $2\le u_n<\alpha$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $2\le u_{n+1}<\alpha$.

$2\le u_n<\alpha$ معناه $f(2)\le f(u_n)<f(\alpha)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

بما أن $u_{n+1}=f(u_n)$ و $f(\alpha)=\alpha$ و $f(2)=3$ إذن $3\le u_{n+1}<\alpha$ أي $2\le u_{n+1}<\alpha$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل عدد طبيعي n، $2\le u_n<\alpha$.

وكذلك لدينا $\alpha<v_0\le 5$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $\alpha<v_n\le 5$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $\alpha<v_{n+1}\le 5$.

$\alpha<v_n\le 5$ معناه $f(\alpha)<f(v_n)\le f(5)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

بما أن $v_{n+1}=f(v_n)$ و $f(\alpha)=\alpha$ و $f(5)=\frac{7}{2}$ إذن $\alpha<u_{n+1}\le\frac{7}{2}$ أي $\alpha<v_{n+1}\le 5$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل عدد طبيعي n، $\alpha<v_n\le 5$.

aziz_mus1@hotmail.fr

ب) استنتاج اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) و (v_n).

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;\alpha[$، $f(x)-x>0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$2\le u_n<\alpha$ فإن $f(u_n)-u_n>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ وعليه المتتالية (u_n) متزايدة.

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha;+\infty[$ لدينا $f(x)-x<0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$\alpha<v_n\le 5$ فإن $f(v_n)-v_n<0$ أي $v_{n+1}-v_n<0$ وعليه المتتالية (v_n) متناقصة.

3) **أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي** n، $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{4v_n+1}{v_n+1}-\frac{4u_n+1}{u_n+1}=\frac{4v_nu_n+4v_n+u_n+1-4v_nu_n-v_n-4u_n-1}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{3v_n-3u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}=\frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\ge 2$ معناه $u_n+1\ge 3$ و $v_n\ge 2$ لأن $\alpha<v_n\le 5$ معناه $v_n+1\ge 3$

إذن $(v_n+1)(u_n+1)\ge 9$ يكافئ $\frac{3}{(v_n+1)(u_n+1)}\le\frac{1}{3}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n>u_n$

فإنّ $\frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}\le\frac{1}{3}(v_n-u_n)$ أي $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

ب) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

لدينا $v_0-u_0=5-2=3$ و $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}=3$ أي $v_0-u_0\le\left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ونبرهن أن $v_{n+1}-u_{n+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1}$ أي نبرهن أن $v_{n+1}-u_{n+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$.

لدينا $v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ معناه $\frac{1}{3}(v_n-u_n)<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ أي $\frac{1}{3}(v_n-u_n)<\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ ولدينا حسب السؤال السابق

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{3}(v_n-u_n)$ ومنه $v_{n+1}-u_{n+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<\alpha$ و $v_n>\alpha$ ومنه $v_n>u_n$ أي $v_n-u_n>0$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n: $0<v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

جـ) استنتاج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ حسب النهايات بالمقارنة نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

aziz_mus1@hotmail.fr

تحديد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية ℓ.

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell$ ولدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$ إذن $\ell=f(\ell)$ وحسب ماسبق $\ell=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

التمرين الرابع:

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) **دراسة اتجاه تغيّر الدالة g.**

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=-2-2e^{2x-2}=-2\left(1+e^{2x-2}\right)$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x)<0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) **تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.**

لدينا $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}1-2x-e^{2x-2}=+\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}1-2x-e^{2x-2}=\lim_{x\to+\infty}(2x-2)\left(\frac{1-2x}{2x-2}-\frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right)=-\infty$$

ومنه الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $g(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ وبالأخص المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أنّ $0,36<\alpha<0,37$.

$g(0,36)\approx 0,002$ و $g(0,37)\approx -0,02$ إذن $g(0,36)\times g(0,37)<0$ ومنه $0,36<\alpha<0,37$.

3) **استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.**

لدينا الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x<\alpha$ فإن $g(x)>g(\alpha)$ أي $g(x)>0$.

إذا كان $x>\alpha$ فإن $g(x)<g(\alpha)$ أي $g(x)<0$ ؛ كما أنّ $g(\alpha)=0$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

1) أ) **تبيين أنّ $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.**

$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب) إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(-x)$.

إذا كان $x<-\alpha$ فإن $-x>\alpha$ ومنه $g(-x)<0$ أي $f'(x)<0$.

إذا كان $x>-\alpha$ فإن $-x<\alpha$ ومنه $g(-x)>0$ أي $f'(x)>0$.

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) **حساب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$.**

$\lim_{x\to-\infty}xe^{2x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}=0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^{2x+2}-x+1=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

aziz_mus1@hotmail.fr

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) **حساب** $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}xe^{2x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}=0$$

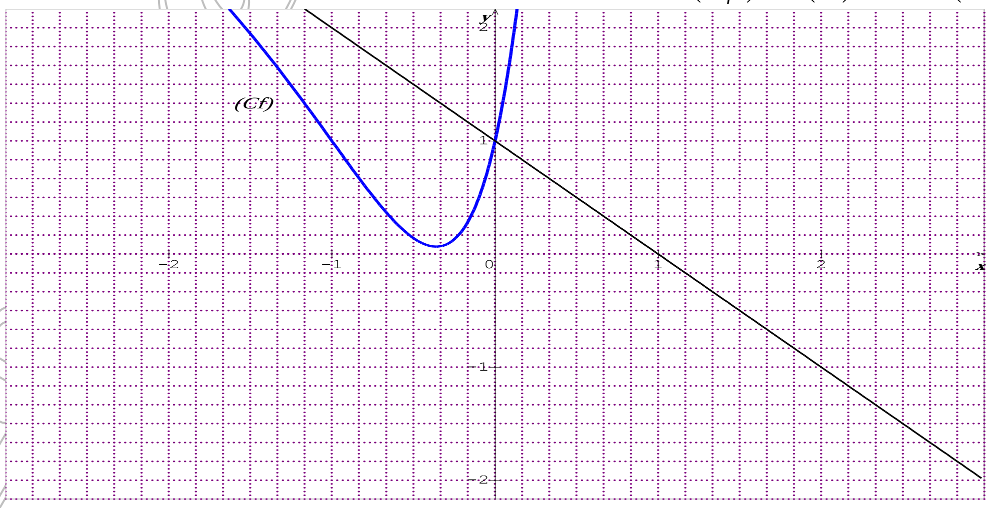
ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=-x+1$ بجوار $-\infty$.

4) **دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).**

$f(x)+x-1=xe^{2x+2}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{2x+2}>0$ ومنه إشارة $f(x)+x-1$ هي نفس إشارة x .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)+x-1$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$.	(C_f) فوق (Δ)	

5) **انشاء (Δ) و (C_f).**



aziz_mus1@hotmail.fr